OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A VI-A - Soluții

1. Arătați că $3^{2015}+4^{2015}<5^{2015}$.

George-Florin Șerban, Brăila

Soluție.

$$5^{2015}=5^2\cdot 5^{2013}=\left(3^2+4^2\right)\cdot 5^{2013}=3^2\cdot 5^{2013}+4^2\cdot 5^{2013}>$$
$$>3^2\cdot 3^{2013}+4^2\cdot 4^{2013}=3^{2015}+4^{2015}.$$

2. Fie numerele raționale pozitive $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ astfel încât

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000.$$

Arătați că suma $\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+...+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ este un număr de forma $2^n-1,\ n\in\mathbb{N}$.

Octavia Popa, Brăila

Soluție. Notăm S=$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+2}+.....+\frac{a_{2015}}{a_{2015}+2015}$ și adunând cu $\frac{1}{a_1+1}+\frac{2}{a_2+2}+...+\frac{2015}{a_{2015}+2015}=2000,$ obținem $S=16-1=2^4-1.$

3. Fie $M_1, M_2, M_3, ..., M_n$ puncte coliniare în această ordine, astfel încât:

$$M_1M_2=9;\ M_2M_3=17,\ M_3M_4=33,\ M_4M_5=65,\ ...,\ M_{n-1}M_n.$$

a) Aflați lungimea segmentului $[M_8M_9]$.

b) Aflați $n\in\mathbb{N}$ dacă $M_1M_n=8194.$

c) Aflați lungimea segmentului M_2A unde A este mijlocul segmentului $[M_7M_9]$.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

Soluție. a) $M_nM_{n+1}=2^{n+2}+1; M_8M_9=2^{10}+1=1025.$

b)

$M_1M_n=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_4+...+M_{n-1}M_n=$

$=(2^3+1)+(2^4+1)+...+(2^{n+1}+1)=2^{n+2}-2^3+n-1=8194$

$M_1M_{10}=2^{11+2}-8+11-1=2^{13}+2=8194\Rightarrow n=11.$

c)

$M_2A=M_2M_7+M_7M_9:2=(2^4+1)+(2^5+1)+(2^6+1)+(2^7+1)+(2^8+1)+[(2^9+1)+(2^{10}+1)]:2=$

$=(2^9-2^4)+5+2^8+2^9+1=1270.$

4. Fie $\sphericalangle AOD$ cu $m(\sphericalangle AOD)=98^0$ și $(OB$, $(OC$ semidrepte incluse în interiorul $\sphericalangle AOD$, $(OC$ semidreaptă inclusă în interiorul $\sphericalangle BOD$ astfel încât

$$a\cdot m(\sphericalangle AOB)=c\cdot m(\sphericalangle BOC) \text{ și } b\cdot m(\sphericalangle BOC)=c\cdot m(\sphericalangle COD),$$

unde *a*, *b*, *c* sunt numere prime care verifică relația $3a+5(3b+7c)=195$.

Să se afle $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$ și $m(\sphericalangle COD)$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. $3a+5(3b+7c)=195\Rightarrow a=5\Rightarrow 5(3b+7c)=180\Rightarrow c=3\Rightarrow b=5$

Rezultă că $\begin{cases} m(\angle AOB)+m(\angle BOC)+m(\angle COD)=98^0 \\ 5\cdot m(\angle AOB)=3\cdot m(BOC) \\ 5\cdot m(\angle BOC)=3\cdot m(COD) \end{cases}$

$\Rightarrow m(\angle AOB)=18^0\Rightarrow m(\angle BOC)=30^0\Rightarrow m(\angle COD)=50^0.$